Vybrané aplikace kombinatoriky (BI-VAK)

Geometrie a kreslení grafů

Proseminář č. 4

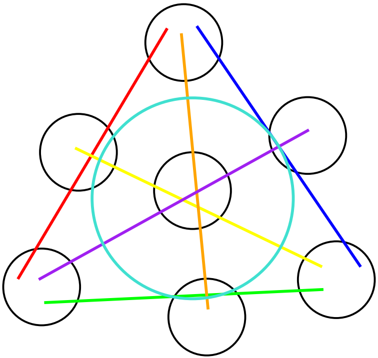
Václav Blažej, Dušan Knop, Šimon Schierreich, Ondřej Suchý, Tomáš Valla

Katedra teoretické informatiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/BI-VAK/

LS 2021/2022, 7. března 2022

Návrh karetní hry

Pravidlo: Každé dvě karty mají jeden společný symbol.



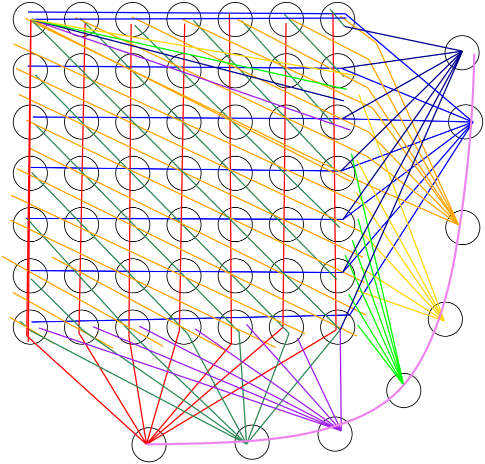
Dodatečné pravidlo: A nemá to být nuda.

Další dodatečné pravidlo: A chceme co nejméně symbolů na každé kartě.

Toto je *Fanova rovina*

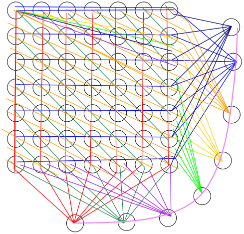
Návrh větší karetní hry

Pravidla: Každé dvě karty mají jeden společný symbol, nemá to být nuda a chceme co nejméně symbolů na každé kartě.



Návrh větší karetní hry

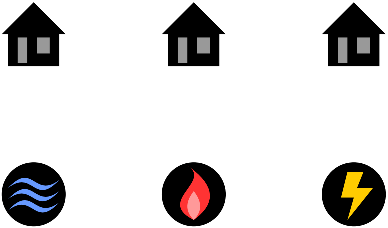
Pravidla: Každé dvě karty mají jeden společný symbol, nemá to být nuda a chceme co nejméně symbolů na každé kartě.



Řád je šířka (a výška) mřížky výše.
Existuje pokud je řád p^k kde p je prvočíslo.
Žádné jiné neznáme a nedovedeme dokázat, že neexistují.

Kreslení grafů

Mějme tři domy a tři zdroje. Jak propojit každý dům s každým zdrojem?



- Zdá se, že je nelze bez křížení (či triků) spojit.
- Co je to nakreslení grafu?

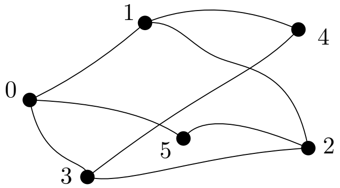
Graf

Definice

Neorientovaný graf je uspořádaná dvojice (V, E), kde

- V je neprázdná konečná množina **vrcholů**,
- E je množina **hran**.

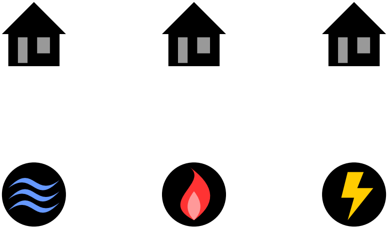
$$G = \big(\{0,1,2,3,4,5\}, \{\{0,1\},\{0,3\},\{0,5\},\{2,1\},\{2,3\},\{2,5\},\{4,1\},\{4,3\}\}\big)$$



Nakreslení mapuje vrcholy na body v rovině a hrany na oblouky.
Rovinný graf lze nareslit bez křížení hran (příslušných oblouků).

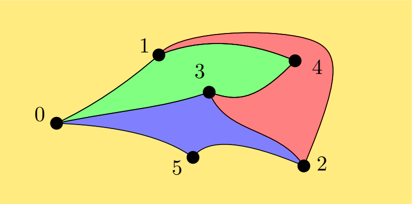
Kreslení grafů

Mějme tři domy a tři zdroje. Jak propojit každý dům s každým zdrojem?



- Zdá se, že je nelze bez křížení (či triků) spojit.
- Které další grafy ještě nelze nakreslit?

Vlastnosti nakreslení



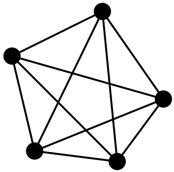
- Eulerova formule: $|V| - |E| + s = 2$
- $|E| \leq 3|V| - 6$
- Existuje vrchol stupně 5
- Každý rovinný graf lze vybarvit nejvýše šesti barvami

Kdy je graf nerovinný

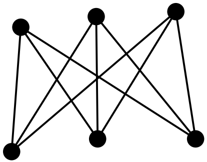
Věta (Kuratowski, 1930)

Graf je rovinný právě tehdy když neobsahuje podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgraf.

K_5

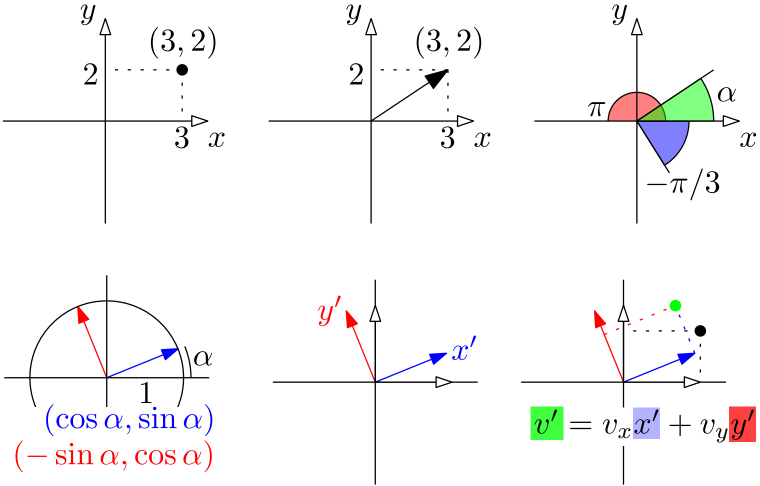


$K_{3,3}$



Geometrie

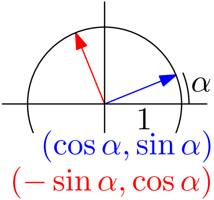
bod, vektor, úhel, jednotková kružnice, koordináty, rotace

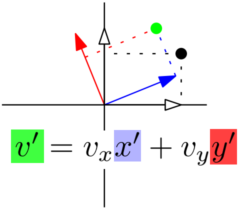


Zápis pomocí matic a vektorů

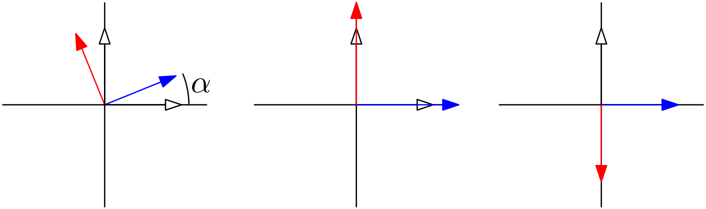
$$v'_x = v_x \cos\alpha - v_y \sin\alpha$$
$$v'_y = v_x \sin\alpha + v_y \cos\alpha$$

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

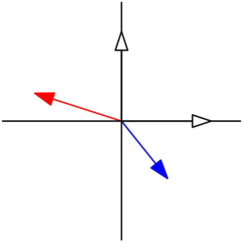




Rotace, škálování, převrácení

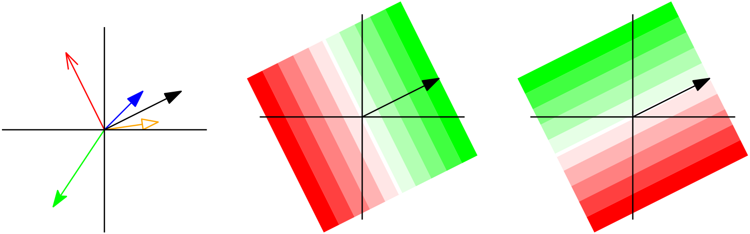


$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

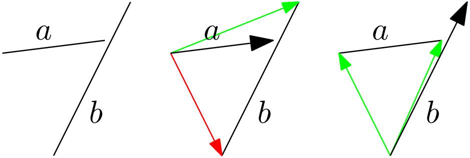


Geometrické součiny

Skalární $u_x v_x + u_y v_y$ a vektorový $u_x v_y - u_y v_x$ součin

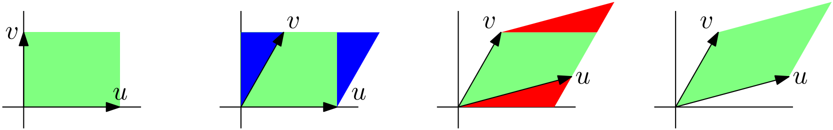


- Jak zjistit jeslti se protínají úsečky a a b?

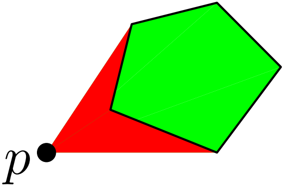


Obsah ve 2D

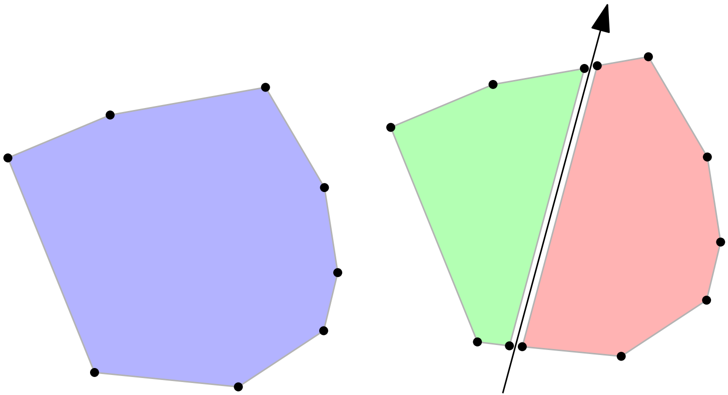
Vektorový součin $u_x v_y - u_y v_x$ je obsah rovnoběžníku daného vektory u a v.



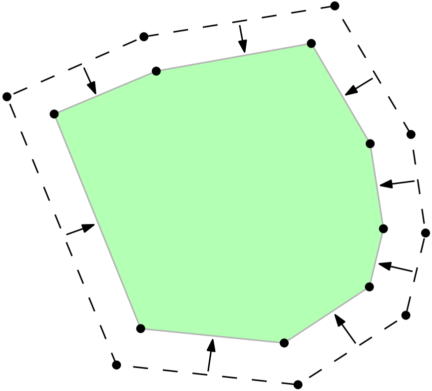
Jak zjistit obsah polygonu?



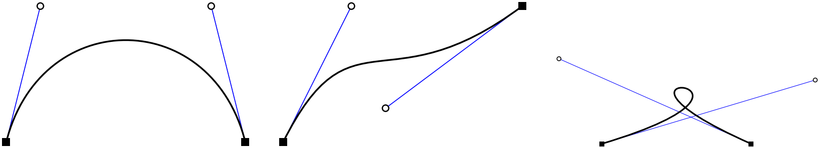
Rozříznutí polygonu



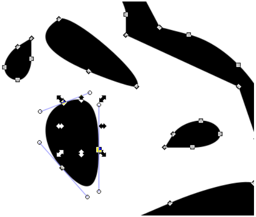
Zmenšení polygonu

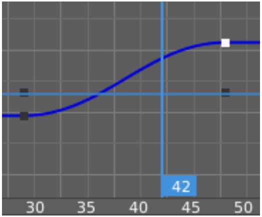


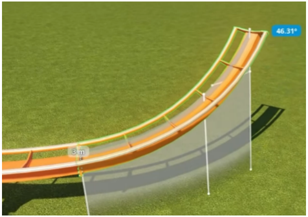
Křivky



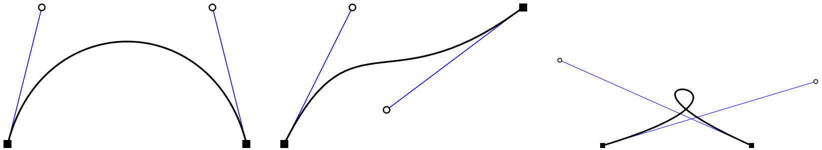
Beziérovy křivky





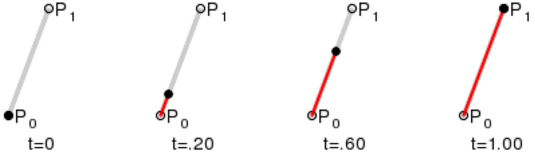


Beziérovy křivky

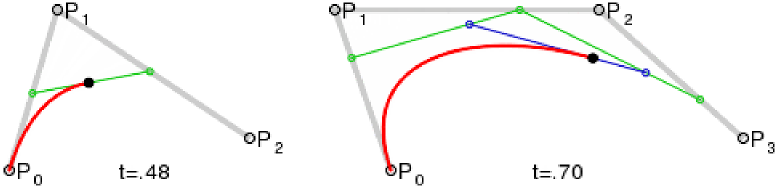


Lineární interpolace (mezi body P_0 a P_1 pro t od 0 do 1):

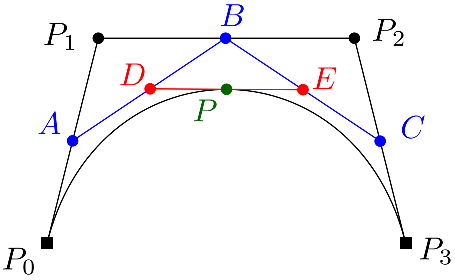
$$\mathrm{lerp}(P_0, P_1, t) = P_0 \cdot (1 - t) + P_1 \cdot t$$



Beziérovy křivky



Beziérovy křivky



- $A = \mathrm{lerp}(P_0, P_1, t)$
- $B = \mathrm{lerp}(P_1, P_2, t)$
- $C = \mathrm{lerp}(P_2, P_3, t)$
- $D = \mathrm{lerp}(A, B, t)$
- $E = \mathrm{lerp}(B, C, t)$
- $P = \mathrm{lerp}(D, E, t)$

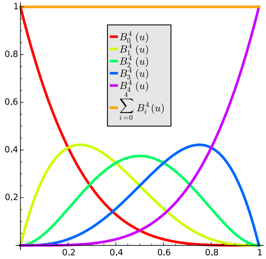
De Casteljau's algorithm

Beziérovy křivky – vyjádření polynomu

$$
\begin{aligned}
A &= \mathrm{lerp}(P_0, P_1, t) \\
B &= \mathrm{lerp}(P_1, P_2, t) \\
C &= \mathrm{lerp}(P_2, P_3, t) \\
D &= \mathrm{lerp}(A, B, t) \\
E &= \mathrm{lerp}(B, C, t) \\
P &= \mathrm{lerp}(D, E, t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= (1-t)P_0 + tP_1 \\
B &= (1-t)P_1 + tP_2 \\
C &= (1-t)P_2 + tP_3 \\
D &= (1-t)A + tB \\
E &= (1-t)B + tC \\
P &= (1-t)D + tE
\end{aligned}
$$

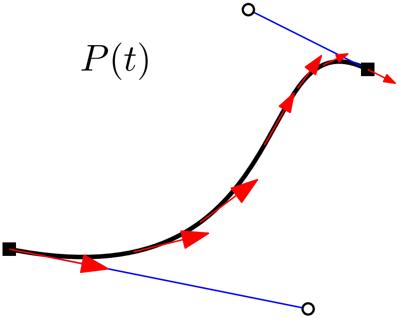
$$
\begin{aligned}
P(t) = &P_0(\quad t^3 + 3t^2 \quad -3t + 1 \quad) \\
&P_1(\quad 3t^3 - 6t^2 \quad +3t \quad) \\
&P_2(\quad -3t^3 + 3t^2 \quad) \\
&P_3(\quad t^3 \quad)
\end{aligned}
$$

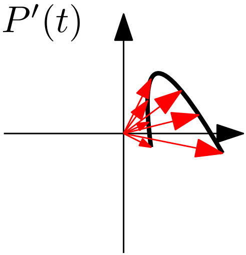


Bernsteinovy polynomy

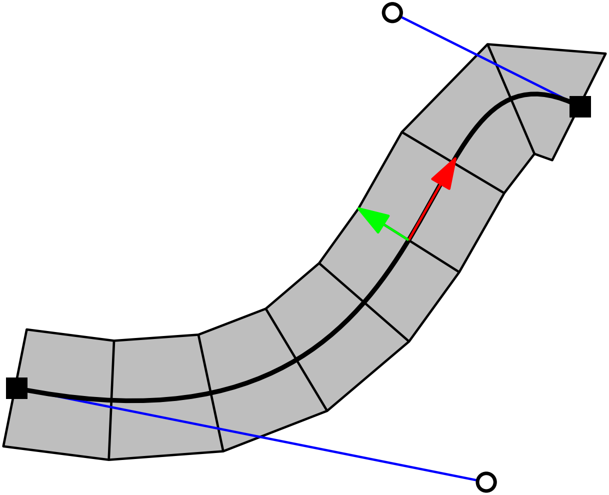
Beziérovy křivky – Bernsteinovy polynomy

$$\begin{aligned} P(t) = &P_0(&& t^3 + 3t^2 && -3t + 1 &&) \\ &P_1(&& 3t^3 - 6t^2 && +3t &&) \\ &P_2(&& -3t^3 + 3t^2 && &&) \\ &P_3(&& t^3 && &&) \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} P'(t) = &P_0(&& -3t^2 + 6t && -3) \\ &P_1(&& 9t^2 - 12t && +3) \\ &P_2(&& -9t^2 + 6t &&) \\ &P_3(&& 3t^2 &&) \end{aligned}$$





Beziérovy křivky – generování grafiky



Beziérovy křivky – křivost

$$\kappa = \frac{\det(P', P'')}{||P'||^3} \qquad r = \frac{1}{\kappa}$$