Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 10. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(10.1) Dokažte následující tvrzení z přednášky. Rozfázovaně tak sami dokážete něco o piškvorkách n^d.

(i) Ve hře n^d prochází každým bodem nejvýše $(3^d - 1)/2$ vyhrávajících linií.

(ii) Nechť F je hypergraf, jehož všechny hrany mají velikost alespoň n a každý vrchol leží v nejvýše $n/2$ hranách. Potom pro F existuje párovací remízová strategie.

(iii) Pro hru n^d, $n \geq 3^d - 1$, existuje párovací remízová strategie. *3 body*

(10.2) Uvažujme tuto inverzní silnou poziční hru: dva hráči zabírají hrany úplného grafu K_n, kdo vytvoří K_3 s hranami své barvy prohrál.

(i) Ukažte, že 1. i 2. hráč se dokáže ubránit po dobu menší než $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ tahů (neboli dokud je zabráno méně než polovina hran). Jinými slovy, ukažte, že existuje obranná strategie použitelná oběma hráči, která bude fungovat po dobu $t < \frac{1}{2}\binom{n}{2}$ tahů. *2 body*

(ii) Ukažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že každá hra na K_n pro $n \geq n_0$ musí skončit něčím vítězstvím po $\lceil (\frac{4}{5} + \varepsilon)\binom{n}{2} \rceil$ tazích. (Hint: Najděte si někde, kolik maximálně hran může mít graf neobsahující K_k jako podgraf.) *4 body*

(10.3) Uvažujme úplný graf G s hranami obarvenými buďto červeně nebo modře. Dokažte, že graf $M = (V(G), \{e \in E(G) :\ e \text{ modrá}\})$ je souvislý nebo graf $R = (V(G), \{e \in E(G) :\ e \text{ červená}\})$ je souvislý. *2 body*

(10.4) Dva hráči se střídají v zabírání prvků množiny $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Cílem je jako první získat podmnožinu $A \subseteq M$ čísel své barvy, které tvoří aritmetickou posloupnost délky k. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že první hráč vyhraje tuto hru. (Hint: najít vhodné mapování na hyperkrychli) *4 body*