Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 11. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(11.1) Věta („Silnější Erdős-Selfridge"): Nechť $F = (V, E)$ je k-uniformní hypergraf takový, že

$$|E| + \mathrm{MaxDeg}(F) < 2^k.$$

($\mathrm{MaxDeg}(F) = \max_{v \in V} |\{A \in E;\ v \in A\}|$ značí maximální stupeň vrcholu v hypergrafu F.) Potom v silné hře na F existuje (explicitně popsaná) blokovací strategie druhého hráče.
Dokažte předchozí větu. *3 body*

(11.2) Použitím Silnějšího Erdős-Selfridge dokažte, že hra 4^2 je remízová hra. *2 body*

(11.3) Uvažujme hru $AP(k, n)$, kde Maker a Breaker zabírají prvky $\{1, \ldots, n\}$ a cílem Makera je vyrobit aritmetickou posloupnost délky k své barvy. Ukažte, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro všechna $n < c2^{k/2}\sqrt{k}$ má Breaker ve hře $AP(k, n)$ explicitně popsanou vyhrávající strategii. *3 body*

(11.4) Uvažujme hru $AP(k, n)$, kde Maker a Breaker zabírají prvky $\{1, \ldots, n\}$ a cílem Makera je vyrobit aritmetickou posloupnost délky k své barvy. Ukažte, že existuje konstanta c taková, že pro všechna $n > c2^k k^3$ má Maker ve hře $AP(k, n)$ explicitně popsanou vyhrávající strategii. *3 body*

(11.5) Dokažte, že pokud $k \le k'$ a $\ell \le \ell'$, potom $R(k, \ell) \le R(k', \ell')$. ($R(k, \ell)$ je číslo definované v důkazu Ramseyovy věty.) *2 body*