Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 12. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(12.1) Uvažme úplný graf K_n s hranami obarvenými buďto červeně nebo modře. Dokažte, že pokud tento K_n obsahuje monochromatickou kružnici délky $2k+1$ (pro $k \geq 3$), potom obsahuje i monochromatickou kružnici délky $2k$. *3 body*

(12.2) Ukažte, že Builder vyhraje online Ramsey hru pro cestu P_n v $O(n)$ tazích, pokud painter může používat k barev (k považujme za konstantu). *3 body*

(12.3) Formulujte a dokažte variantu Erdősovy-Selfridgeovy věty pro $(p:q)$ nevyvážené hry. *5 bodů*

(12.4) Ukažte, že Builder vyhraje online Ramsey hru pro libovolný strom T na třídě lesů, pokud Painter může barvit obecně t barvami. *3 body*

(12.5) Uvažme systém (V, E) všech p-tic E na N-prvkové množině V (neboli úplný p-uniformní hypergraf na vrcholech V). Maker a Breaker střídavě zabírají p-tice z E, Maker vyhraje, když dosáhne toho, aby na nějaké k-prvkové $M \subseteq V$ byly všechny p-tice jeho (neboli postavil svou kliku v hypergrafu (V, E)). Ukažte, že existuje konstanta c_p (tedy závislá na p) taková, že pokud $N \geq 2^{c_k n^k}$, má Maker vyhrávající strategii v této slabé hře. *4 body*

(12.6) Uvažme všechny podmnožiny P množiny $\{1, \ldots, n\}$. Maker a Breaker střídavě zabírají množiny z P. Maker vyhraje, pokud zabral všech 2^{100} podmnožin nějaké 100-prvkové podmnožiny $\{1, \ldots, n\}$. Ukažte, že pro dostatečně velké n Maker vyhraje. (Hint: předchozí cvičení.) *4 body*

(12.7) (Závěrečná lahůdka) Pan Červený a pan Modrý střídavě barví čísla z $\{1, \ldots, n\}$ svou barvou. Zafixujme nějakou červenomodrou posloupnost P délky 100 (řekněme Č,M,Č,Č,Č,M,M,Č,M,...,Č). Pan Červený vyhraje, pokud po doběhnutí hry zbude aritmetická posloupnost délky 100, která je obarvená přesně jako posloupnost P. Jinak vyhraje pan Modrý. Ukažte, že pro dostatečně velké n vyhraje pan Červený. (Hint: vlastní argument založený na potenciálové metodě.) *6 bodů*