

## Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 2. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

- (2.1) Nechť  $G \in \mathcal{L}$  a  $H \in \mathcal{N}$ . Dokažte, že potom hra  $(G$  společně s  $H)$  patří do třídy  $\mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ . *2 body*
- (2.2) Najděte příklady dvojic kombinatorických her  $G \in \mathcal{L}$  a  $H \in \mathcal{R}$  takových, že jejich součty (hra  $G$  společně s  $H)$  patří po řadě do tříd  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{P}$  a  $\mathcal{N}$  a samozřejmě to zdůvodněte. Udělejte to samé pro  $G \in \mathcal{N}$  a  $H \in \mathcal{N}$ . *2 body*
- (2.3) Analyzujte partie velikosti  $3 \times n$  v Dominování pro každé přirozené  $n$ . Návod jak na to: nejprve ručně rozeberte konfigurace  $3 \times 1$ ,  $3 \times 2$ ,  $3 \times 3$ . Potom částečně ručně a částečně principem svázané ruky ukažte, že pozice  $3 \times 4$  až  $3 \times 7$  jsou  $\mathcal{R}$ . Na pozice  $3 \times n$  pro  $n > 7$  vhodně aplikujte princip svázané ruky. *3 body*
- (2.4) Uvažme následující hru. V aktuálním tahu máme hromádku  $n$  sirek. Hráč ve svém tahu odebere z hromádky libovolného netriviálního (tj. různého od  $n$ ) dělitele čísla  $n$ . (Příklad: Pro  $n = 12$  lze zanechat na hromádce 11, 10, 9, 8 nebo 6 sirek. Kdyby začínající zanechal 10 sirek, druhý hráč může zanechat 9, 8 nebo 5 sirek, a tak dále.) Hráč, který po svém tahu zanechal hromádku s jednou sirkou, vyhrál.
- (i) Charakterizujte  $\mathcal{N}$  a  $\mathcal{P}$  pozice této hry, dokažte své tvrzení nejlépe indukcí. *2 body*
- (ii) A jak dopadne misère varianta této hry? *1 bod*
- (2.5) *Nim* je hra, ve které máme  $k$  hromádek sirek, na  $i$ -té hromádce leží  $n_i$  sirek. Ve svém tahu hráč vybere jednu hromádku a z ní odebere nějaký nenulový počet sirek (klidně všechny). *Hladový Nim* je Nim, ve kterém je povoleno odebírat pouze z hromádky s nejvyšším počtem sirek (pokud je více takových, tak z libovolné z nich). Charakterizujte  $\mathcal{N}$  pozice a  $\mathcal{P}$  pozice hladového Nimu. *3 body*