Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 3. série

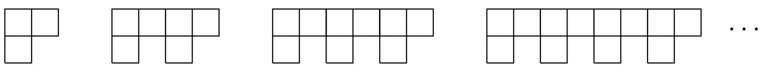
Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(3.1) Uvažme hry 0, 1, -1 a $*$ a všechny součty každé hry s každou včetně sebe sama. Jak vypadají ekvivalenční třídy této množiny her dané relací $=$? Vše pochopitelně poctivě zdůvodněte. *2 body*

(3.2) Dokažte následující tvrzení. Dejte si pozor, abyste v důkazu používali výhradně axiomů a již dříve z axiomů dokázaných věcí. Hint: indukce dle narozenin.
 (i) Pro každé tři hry G, H, J platí $(G + H) + J \equiv G + (H + J)$ (asociativita sčítání). *2 body*
 (ii) Pro každé dvě hry G, H platí $-(G + H) \equiv (-G) + (-H)$ (distributivita minus). *2 body*

(3.3) Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní (technické Lemma z přednášky):
(1) $G \geq 0$
(2) L vyhraje jako 2. hráč hru G.
(3) Pro každou hru X platí: když L vyhraje jako 2. hráč hru X, potom L vyhraje jako 2. hráč hru $G + X$.
(4) Pro každou hru X platí: když L vyhraje jako 1. hráč hru X, potom L vyhraje jako 1. hráč hru $G + X$.
Možný postup: Ukažte, že (3)&(4)⇔(1), (2)⇔(3), (2)⇔(4). *3 body*

(3.4) Uvažme následující posloupnost pozic v Dominování:



P_1 P_2 P_3 P_4

Tedy P_i vypadá jako i „vinglů“ slepených k sobě. Dokažte, že $P_i = *$ pro lichá i a $P_i = 0$ pro sudá i. *3 body*