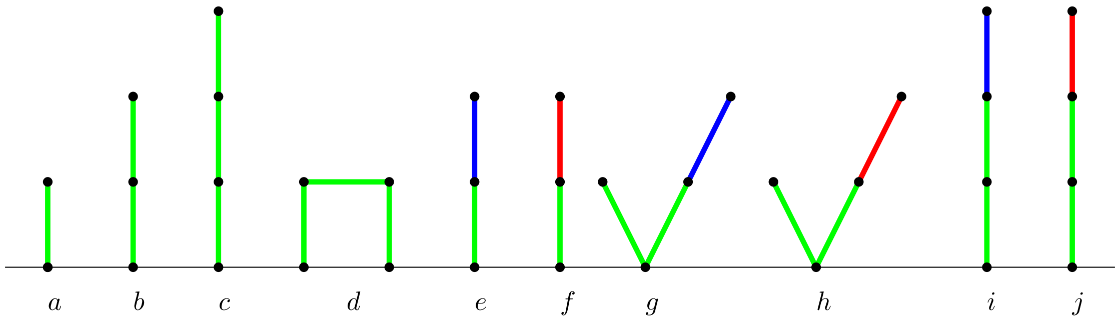
Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 4. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

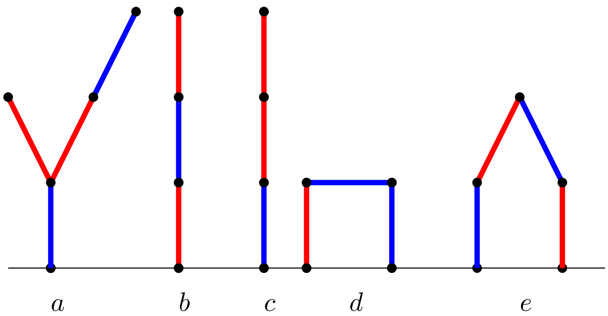
(4.1) Popíšeme pravidla hry *Hackenbush*. Je dán graf s hranami až tří barev, modré, červené a zelené. Alespoň jeden vrchol grafu leží „na zemi“, kterou znázorňujeme tenkou vodorovnou čarou. Levý hráč ve svém tahu smaže modrou nebo zelenou hranu, pokud se tímto odpojila nějaká část grafu od země, je tato část celá smazána. Pravý hráč maže červené nebo zelené hrany (a také odstraňuje odpojené části). Pro následující pozice Hackenbushe popište a pochopitelně odůvodněte částečné uspořádání relací $\leq$. Nakreslete jejich Hasseův diagram.



3 body

(4.2) Najděte kanonický tvar součtů $\{0|*\} + *$, $\{*|0\} + *$ a $\{0|*\} + \{*|0\}$. *2 body*

(4.3) Určete čísla následujících pozic v Hackenbushi.



2 body

(4.4) Zafixujme jednu konkrétní pozici H v Hackenbushi, ve které necháme jednu hranu e bez barvy. Z H tedy můžeme vyrobit čtyři různé pozice, podle toho jestli hranu e nabarvíme na modrou, zelenou, červenou nebo ji smažeme. (Při smazání musíme odstranit části grafu odpojené od země.) Popište částečné uspořádání těchto čtyř her relací $\leq$ a dokažte, že toto uspořádání nezávisí na zvolené počáteční pozici H, nýbrž pouze na stavu hrany e. Pokuste se upřednostnit důkazy indukcí před nejrůznějšími ad-hoc argumenty. *2 body*

(4.5) Mějme hru *Toads and Frogs* která se hraje na poli $n \times m$. Každé políčko může být buď prázdné, nebo na něm je Toad (T) či Frog (F). Levý hráč hraje za Toads a táhne s T doprava, podobně pravý hráč hraje za Frogs s F a táhne doleva. Běžně je možné skočit pouze o jednu pozici na prázdné políčko, ale pokud je na něm nepřítel a za ním je volné políčko, tak je možné ho přeskočit (pouze jednoho). První hráč, který nemá tah prohrál.
Jaký je kanonický tvar následující partie hry Toads & Frogs?

T		F	
	T		F
T	F		
	T	F	
	T		F

2 body