Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 6. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(6.1) Uvažujme hru $G_n = \text{Odčítání}(a_1, \ldots, a_k;\, n)$ pro nějaká kladná celá čísla a_i a n. (Od počátečního počtu n sirek střídavé hráči odčítají jedno z čísel a_i; kdo nemá tah, prohrál.) *Nim-posloupnost* hry G je posloupnost $h_0, h_1, h_2, h_3, \ldots$ taková, že h_i je nimber, kterému se rovná hra G_i. Určete (a pochopitelně zdůvodněte/dokažte výsledek) nim-posloupnost hry $\text{Odčítání}(2, 3, 5;\, n)$. *2 body*

(6.2) Hra *Amazonky* se hraje na šachovnici $n \times m$, kde každé políčko je: prázdné, zničené, čeRná amazonka nebo bíLá amazonka. Amazonka se pohybuje jako šachová dáma. Na konci svého pohybu amazonka vystřelí šíp (libovolným směrem), který se pohybuje také jako dáma. Šíp zničí políčko, kam dopadne. Amazonka ani šíp nesmí překročit nebo skončit na zničeném políčku nebo políčku obsazeném jinou amazonkou. Jako obvykle, kdo nemůže táhnout či střílet, prohrál. Nechť $g(a, b, c)$ je jednorozměrná verze Amazonek s a prázdnými políčky, potom bílou amazonkou, potom b prázdnými políčky, pak černou amazonkou, a potom c prázdnými políčky. Jaká je hodnota hry $g(a, b, c)$, ve smyslu jaký je její kanonický tvar? (Nezapomeňte na případy $a, b, c = 0$.) *3 body*

(6.3) Uvažme tuto pozici v Padajícím Dominu (zleva doprava): Jedna bílá kostička, potom $n \geq 2$ černých kostiček, potom opět jedna bílá. Dokažte, že tato pozice je rovna $\maltese_{n-2}$. *2 body*

(6.4) *Push* (*Odstrkování*) je hra, kde hrací plán je tvořen řádkou políček, tahy spočívají v posunutí vlastního kamene vlevo a případném odsunutí (svých i soupeřových) kamenů, pokud na tom políčku vlevo už něco je. Pro zápis pozice použijeme C (černá) B (bílá) M (mezera). M^n znamená n mezer. Určete hodnotu následujících her (v kanonickém či dostatečně jednoduchém tvaru).

(i) $CBCB$
(ii) M^nC
(iii) M^nBC
(iv) M^nBM^mC *3 body*

(6.5) John Conway jednou pravil: „Je zábavné ověřit, že pro každou hru G platí $\maltese_{\maltese_{\maltese_G}} = \uparrow$. To konkrétně znamená, že $\uparrow$ je unikátní řešení rovnice $G = \maltese_G$.“ Celé tvrzení kompletně dokažte. *3 body*